Representação decimal de números reais e o mecanismo de caos dinâmico

César R. de Oliveira

Departamento de Matemática, UFSCar

São Carlos, SP, 13560-970

março de 2011, oliveira@dm.ufscar.br

Representação decimal

Classificam-se os números reais no intervalo $\mathcal{I} = [0, 1)$ nos racionais e nos irracionais. Os racionais são aqueles que podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q números naturais com $q \neq 0$ e $p < q$. Os racionais, quando representados na forma decimal, ou possuem um número finito de dígitos não-nulos ou blocos (não-nulos) que se repetem indefinidamente, as chamadas dízimas periódicas. Como exemplos considere $\frac{1}{4} = 0.25000 \cdots$ e $\frac{2}{11} = 0.18181818 \cdots$; também podem ocorrer situações como $0.531297575757575 \cdots$. Note que está sendo usado o ponto ao invés da tradicional vírgula para representar o *ponto decimal*.

Os números irracionais são aqueles que representados na forma decimal apresentam infinitos algarismos não-nulos, mas sem que ocorram blocos que se repetem como nas dízimas periódicas; talvez o exemplo mais famoso de número irracional seja π, de forma que o número $\frac{\pi}{10} = 0.314159265 \cdots$ também é irracional e pertence a $\mathcal{I}$.

Analisando melhor os números, o que significa escrever 0.25? O primeiro dígito 0 significa, obviamente, que o número (ponto) considerado está entre 0 e 1. Como a base é decimal, ou seja, são utilizados os algarismos $0, 1, 2, \cdots, 9$ para representar os números, divide-se o intervalo $\mathcal{I}$ em dez subintervalos

$$[0, 0.1),\ [0.1, 0.2),\ [0.2, 0.3), \cdots, [0.9, 1);$$

o dígito 2 em 0.25 significa que nesta primeira divisão do intervalo $[0, 1)$ o número considerado está no terceiro subintervalo. Bem, agora divide-se o terceiro subintervalo em novos dez, a saber

$$[0.20, 0.21),\ [0.21, 0.22), \cdots, [0.29, 0.30),$$

e o dígito 5 diz que 0.25 está, entre tais intervalos, no sexto. Como os dígitos restantes são todos nulos, tem-se que para qualquer subdivisão subsequente, 0.25 estará sempre no primeiro subintervalo, e tal ponto está unicamente determinado, pois os comprimentos desses subintervalos nessa sequência tendem a zero.

Alguns números possuem mais de uma representação decimal. Por exemplo: $1 = 0.99999 \cdots$ É possível convencer-se disto analisando os subintervalos a que $0.9999 \cdots$ pertence, ou raciocinando do seguinte modo: se $x = 0.9999 \cdots$, então $10x = 9.9999 \cdots = 9 + x$, logo $10x - x = 9$, concluindo-se que $x = 1$.

Usando essas ideias sobre a representação decimal, é possível, muitas vezes, construir números adequados a certos propósitos, bastando ir escolhendo os subintervalos sucessivos de forma conveniente. Isto será fundamental a seguir.

Sistemas determinísticos e caos

A seguinte questão tem chamado a atenção de muitos estudiosos: como sistemas dinâmicos determinísticos podem produzir movimentos caóticos (imprevisíveis na prática)? O objetivo deste texto é discutir como a imprevisibilidade é gerada.

Por *sistema dinâmico determinístico* deve-se entender um modelo matemático com uma lei de evolução temporal bem especificada, de forma que, se se conhece como o sistema está disposto no presente, pode-se (teoricamente, pelo menos) saber como ele estará no futuro. Como exemplo de sistema determinístico considere um único planeta ao redor de uma estrela; tomando-se como modelo matemático a segunda lei de Newton da Mecânica Clássica, e como disposição inicial do planeta sua posição e sua velocidade em certo instante, é possível prever exatamente suas disposições futuras.

Neste contexto dinâmico, o termo *caos* designa comportamentos que na prática são imprevisíveis, embora gerados por sistemas determinísticos. Ele foi cunhado por T. Li e J. A. Yorke em 1975 e "pegou". Mas como isso pode ocorrer? É exatamente a esta questão que se pretende apresentar uma resposta, e através da análise de um exemplo específico.

Exemplo de sistema regular

Este primeiro exemplo não apresenta caos, o que será designado por *regular*. Como disposições possíveis do sistema, considere os pontos no intervalo $\mathcal{I}$ com uma pequena modificação: identifique seus extremos formando uma circunferência (basta imaginar um pedaço de corda com suas extremidades coladas uma à outra). A regra geral para manusear esta identificação é simples: sempre que um número não está em $[0,1)$ subtrai-se sua parte inteira, o que corresponde a um número de voltas completas e, assim, retornando-se ao mesmo ponto; como ilustração, no caso de 3.141592, a parte inteira 3 significa que 3 voltas completas foram dadas, não alterando a disposição do sistema, no caso 0.141592.

A evolução temporal é dada por uma lei na qual só será possível conhecer as disposições do sistema nos instantes $0, 1, 2, 3, \cdots$. A lei é a seguinte: estando o sistema no instante inicial (suposto igual a zero) em $x_0 \in \mathcal{I}$, então no instante um o sistema estará em $\frac{x_0}{10}$, no instante dois em $\frac{x_0}{100}$, e no instante genérico n em $\frac{x_0}{10^n}$. Estes pontos formam a *órbita* de x_0 e este sistema é determinístico.

É esperado que um sistema determinístico atinja algum equilíbrio para instantes muito grandes, o que em linguagem matemática significa fazer o tempo n "tender ao infinito"; em símbolos: $n \to \infty$. Neste exemplo, para n grande, suas disposições sucessivas se aproximam de zero, para toda condição inicial x_0, e o equilíbrio é sempre descrito pela posição zero. É de fato um sistema regular.

Exemplo caótico

Nesta seção será apresentado um modelo matemático com comportamento caótico. Ele é uma simples adaptação de um sistema muito conhecido entre especialistas.

As disposições possíveis do sistema serão as mesmas $\mathcal{I}$ do exemplo anterior. A evolução temporal é dada pela seguinte lei: se a disposição inicial é $x_0 \in \mathcal{I}$, então no instante 1 o sistema estará em $x_1 = 10x_0$, no instante 2 em $x_2 = 100x_0$ e, num instante genérico n em $x_n = 10^n x_0$. A identificação dos pontos 0 e 1 é suposta em cada instante de tempo; assim, se $x_0 = 0.1234567$, então $x_1 = 0.234567$ e $x_5 = 0.67$. Aqui também tem-se um sistema determinístico.

Seguem algumas possibilidades de equilíbrio deste sistema para $n \to \infty$:

Se $x_0 = 0.1$, ou 0.2, tem-se que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, e o equilíbrio é descrito pela posição zero. Se $x_0 = 0.09$ tem-se que $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$. Ainda, se $x_0 = 0.1234567$, segue que $x_n = 0$ para todo $n \geq 7$. A partir destes casos vê-se que para qualquer número racional entre zero e um, cuja representação decimal possui apenas um número finito de algarismos não-nulos, tem-se sempre como disposição de equilíbrio a posição zero.

No caso de números racionais representados por dízimas periódicas, em geral tem-se o equilíbrio dado por uma *órbita periódica*. O que vem a ser uma órbita periódica neste contexto pode ser compreendido através de exemplos. No caso de $x_0 = \frac{2}{11} = 0.18181818\cdots$ tem-se $x_1 = 0.8181818\cdots$, $x_2 = 0.181818\cdots = x_0$; logo, $x_0 = x_2 = x_4 = \cdots$ enquanto $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots$, e o equilíbrio é descrito por uma órbita de período 2. Se $x_0 = 200/297 = 0.673400\,673400\,673400\cdots$, tem-se como equilíbrio uma órbita periódica de período 6, pois $x_0 = x_6$ (e $x_j \neq x_k$ se j, k são distintos e pertencem a $\{0, 1, \cdots, 5\}$). Usa-se a mesma ideia para apresentar exemplos de órbitas periódicas de qualquer período.

Se a condição inicial é um número irracional, o equilíbrio pode ser mais complicado e algo relacionado será discutido adiante.

Uma forma prática de estimar superiormente a distância entre dois pontos em $\mathcal{I}$, representados na forma decimal, é contar, a partir do ponto decimal, quantos algarismos sucessivos coincidem. Por exemplo: se $y = 0.\underline{12146}39$ e $x = 0.\underline{12146}1722$, a distância entre eles é menor ou igual a 10^{-5}.

Agora, se a_j representa um algarismo em $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ e dada uma condição inicial $x_0 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots$, existem condições iniciais que geram órbitas periódicas arbitrariamente próximas de x_0 (é a chamada *densidade das órbitas periódicas*). No caso da nova condição inicial $z_0 = 0.a_1a_2a_3a_4\;a_1a_2a_3a_4\;a_1a_2a_3a_4\;\cdots$ corresponde a uma órbita periódica de período 4 cuja distância a x_0 é menor ou igual a 10^{-4} (caso necessário, use blocos $a_1a_2a_3a_4b$, com $b \neq a_5$). Prosseguindo desta forma, conseguem-se órbitas periódicas de períodos altos cujas condições iniciais estão arbitrariamente próximas de x_0. Já $y_0 = 0.a_1a_2a_3 0000\cdots$ possui como equilíbrio o ponto zero, e sua distância a x_0 é menor do que 10^{-3}. A condição inicial $z_0 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\,314159265\cdots$ é um número irracional cuja distância a x_0 é menor do que 10^{-6}. Como observado acima, há condições iniciais referentes a órbitas periódicas distintas de x_0 com período arbitrariamente longo e tão perto de x_0 quanto se desejar.

Agora considera-se um tipo de equilíbrio gerado por certos números irracionais. Seja

$$\bar{x}_0 = 0.a_1\; b_1b_2\cdots b_{10}\; c_1c_2c_3\cdots c_{100}\; d_1d_2\cdots d_{1000}\cdots,$$

em que $a_1, b_j, c_k, \cdots$ são blocos constituídos por finitos algarismos entre 0 e 9, e são escolhidos como segue:

- $0.a_1000\cdots$ pertence a [0,1);
- dividindo [0,1) em dez subintervalos, como anteriormente, $0.b_1000\cdots$ pertence ao primeiro desses subintervalos, $0.b_2000\cdots$ ao segundo, $\cdots$, e $0.b_{10}000\cdots$ ao último. Por exemplo: $b_1 = \underline{0}53$, $b_{10} = \underline{9}621$.
- dividindo-se agora cada um dos dez subintervalos acima em dez, tem-se cem subintervalos. Escolha os c_j de forma que: $0.c_1000\cdots$ pertença ao primeiro desses subintervalos, $0.c_2000\cdots$ ao segundo, $\cdots$, $0.c_{100}000\cdots$ ao último. Por exemplo: $c_1 = \underline{00}28$, $c_{62} = \underline{61}9277$ e $c_{100} = \underline{99}0176$.

Continuando as divisões como acima, é possível conseguir condições iniciais que, pela evolução temporal, visitam "toda parte" de $\mathcal{I}$. Por "toda parte" entende-se qualquer subintervalo de $\mathcal{I}$; o termo técnico preciso é que a órbita é *densa* em $\mathcal{I}$. Este comportamento seria o "equilíbrio" dessas órbitas para $n \to \infty$. Conclui-se isto observando a órbita de $\bar{x}_0$; por exemplo, visitará $[0.50, 0.51)$ quanto atingir $0.c_{51}c_{52}c_{53}\cdots c_{100}\; d_1d_2\cdots d_{1000}\cdots$, e assim por diante.

É interessante notar que cada um dos $a_1, b_j, c_k, \cdots$ pode ser escolhido entre muitas possibilidades distintas, mostrando que as órbitas de infinitas condições iniciais visitam "toda parte" do intervalo $[0, 1)$ pela evolução temporal. Há ainda outras possibilidades e os leitores podem exercitar a imaginação!

Ocorre que na prática as configurações iniciais são conhecidas com precisão limitada, pois sempre há um erro experimental ou de truncamento (em certos modelos também podem ocorrer variações de temperatura, etc.). O quadro agora está completo: há comportamentos muito distintos pela evolução temporal, os quais se encontram arbitrariamente próximos uns dos outros e, com a precisão limitada dos dados iniciais, não se sabe qual o tipo de equilíbrio, qual comportamento para $n \to \infty$, será seguido.

Um dos ingredientes para o comportamento caótico é a expansividade, ou seja, pontos próximos são afastados rapidamente pela evolução temporal (o que não ocorre no primeiro exemplo acima), e a cada instante de tempo a distância entre dois pontos muito próximos é multiplicada por 10; isto é chamado de *sensibilidade às condições iniciais*. Como ilustração, suponha que a condição inicial seja x_0 com precisão de um milionésimo, ou seja, suponha que ela pode ser qualquer ponto entre x_0 e $x_0 + 10^{-6}$. Pela evolução temporal, no instante 1 este intervalo de precisão passará a ter comprimento 10^{-5}, no instante 2 comprimento 10^{-4}, e no instante 6 comprimento 1, mas esse último é o comprimento do intervalo $\mathcal{I}$, ou seja, decorridos apenas 6 instantes de tempo, qualquer ponto de $\mathcal{I}$ pode estar descrevendo o sistema. É o caos!

Usando um ferramental matemático mais sofisticado, mostra-se que a evolução temporal da "maioria" (no sentido de medida de Lebesgue) das condições iniciais se comporta de forma similar à $\bar{x}_0$, cuja órbita é densa no intervalo $\mathcal{I}$; assim, a condição inicial $\bar{x}_0$ ad hoc está, de fato, longe de ser a exceção.

Os exemplos acima foram definidos em termos de uma sequência de símbolos (no caso $\{0, 1, 2 \cdots, 9\}$) associados à representação decimal, dinâmicas foram postuladas e o caos dinâmico pôde se manifestar de forma clara. É interessante observar que, muitas vezes, a partir de certos sistemas dinâmicos determinísticos, pode-se obter uma *dinâmica simbólica* associada, o que forma uma área de pesquisa atual e com aplicações além da Matemática. A ideia, bastante elegante, é modelar um sistema dinâmico por meio da escolha de um conjunto de símbolos $\{s_n\}$ adequados cuja dinâmica se reduza à função deslocamento σ, definida no espaço das sequências de símbolos, digamos $\overline{s} = (s_n)$, de modo que

$$(\sigma(\overline{s}))_n = s_{n+1},$$

ou seja, a imagem de uma sequência por σ é igual à sequência obtida pelo deslocamento para a esquerda dos símbolos da sequência anterior.

O princípio básico é o seguinte: toda vez que for possível encontrar um sistema dinâmico "isomorfo" a uma dinâmica simbólica adequada (como o exemplo caótico acima), então seguem as propriedades caóticas para o sistema original, ou seja, (1) densidade de órbitas periódicas, (2) existência de órbita densa (chamada *transitividade*) e (3) sensibilidade às condições iniciais. É claro que a noção de isomorfismo deve ser estabelecida de modo preciso, mas o objetivo é obter propriedades dinâmicas baseadas apenas na combinatória [4].

Há vários aspectos do caos que não estão tratados neste texto, como suas ligações com os fractais, dimensões não-inteiras e teoria ergódica [1], mas o objetivo aqui não é o de uma revisão detalhada do assunto e leva, obviamente, muito do gosto do autor.

Em várias situações a presença de caos dinâmico é prejudicial: ele pode dificultar uma boa previsão meteorológica, pode ser o responsável por instabilidades planetárias, causar instabilidades aerodinâmicas, entre outros. Por outro lado, há trabalhos apontando o caos como o mecanismo responsável pelo bom funcionamento de vários órgãos animais, como o coração e o cérebro. Certamente ainda há muitas aplicações a serem detalhadas e compreendidas.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Mário J. D. Carneiro por disponibilizar seu texto sobre o assunto, bem como ao CNPq.

Outras Leituras

[1] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Modern Phys. **57** (1985), 617–656.

[2] J. Gleick, *Caos: A Criação de Uma Nova Ciência*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1989.

[3] W. M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Segunda Edição, Academic Press, Nova Iorque, 2003.

[4] B. P. Kitchens, *Symbolic Dynamics*, Springer-Verlag, Berlim, 1998.

[5] D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.