Funções Polinomiais e o Mundo Digital

Wanderley Moura Rezende

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

1 Introdução

Uma função real polinomial é uma função f de IR em IR que a cada número real x associa o número real $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$, onde $a_i \in$ IR, $i = 0,1,...,n$. Esta função, de natureza simples e elementar, tem um papel destacado na matemática e nas ciências. Podemos observar diversas situações do cotidiano ou da ciência em que uma função polinomial é bastante útil para modelar ou resolver um problema.

Em geometria, por exemplo, a área de um círculo é proporcional ao quadrado do comprimento do seu raio e a área do quadrado é igual ao quadrado do comprimento do seu lado. Na disciplina de Física, você já deve ter ouvido falar de equação horária de um corpo em queda livre, energia potencial elástica de uma mola, energia cinética, etc. A função polinomial do segundo grau é bastante útil nesses contextos! Outros exemplos, na área de economia, de biologia ou em áreas mais diversas do conhecimento, podem ser visualizados em textos de matemática aplicada ou mesmo em um bom livro de Cálculo, como é o caso da referência (Hughes-Hallett *et al*, 1999), citada no final deste artigo. Assim, dois fatores conspiram a favor das funções polinomiais: ou os fenômenos científicos se encaixam maravilhosamente em modelos descritos por funções polinomiais, ou essas funções satisfazem à condição do "menor esforço" do intelecto humano que, para vencer problemas de natureza mais complexa, tende a realizar uma simplificação dos modelos a serem utilizados. De um fato temos certeza: a simplicidade dessas funções é realmente encantadora!

2 Encantadora porque é simples

A "simplicidade" desses tipos de funções deve-se a sua natureza algébrica. Para calcularmos o valor de uma função polinomial precisamos realizar apenas operações algébricas elementares: adição, multiplicação e suas operações inversas. Por exemplo, para $f(x) = x^2 + 0.2x - 2$, $f(5)$ pode ser calculado, utilizando uma "*calculadora padrão*", realizando as seguintes operações: $5\times5 + 0.2\times5 - 2 = 25 + 1 - 2 = 24$.

Outro fato bem interessante relaciona-se à *visibilidade* que este tipo de função nos oferece. Uma vez conhecido (n+1) valores de uma função polinomial f de grau n, a função se revela por completo; quer dizer, uma vez conhecidos $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n+1})$, para x_1, x_2, ..., $x_{n+1} \in$ IR, podemos calcular $f(x)$, para qualquer valor de $x \in$ IR. A função definida por $f(x) = 0.5x^3 - x^2 + 0.5x$ (fig.1) é, com efeito, a única função polinomial de grau três que assume os valores $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(2) = 1$. Mais ainda, uma vez conhecidos os quatros valores citados e sabendo que esta é uma função polinomial de grau 3, podemos determinar algebricamente qualquer outro valor de f para um número real x.

3 Funções diferenciáveis e aproximações polinomiais

Continuidade e *diferenciabilidade* são virtudes de funções reais que estão intimamente relacionadas entre si. Se, grosso modo, o gráfico de uma função real f : IR $\to$ IR *contínua* é uma curva contínua, isto é, "*aquela que ao desenhá-la não tiramos o lápis do papel*" – alegoria de Euler (1707-1783) –, a curva que descreve o gráfico de uma função *diferenciável* deve ter outra propriedade geométrica bem interessante: além de ser contínua ela deve ser *suave*! Quer dizer: o gráfico de uma função diferenciável é uma curva *contínua* e sem *cúspides* (bicos), com formato *arredondado* ou com partes retas unidas de forma *imperceptível* às suas formas arredondadas. Observe, por exemplo, que a função $f(x)=\left||x|-1\right|$ não é diferenciável em exatamente três pontos do seu domínio: x_1 = -1, x_2 = 0 e x_3 = 1 (fig.2). Por outro lado, a função polinomial ilustrada na figura 1, assim como qualquer outra função polinomial, é diferenciável. A função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas seno e cosseno, bem conhecidas do ensino secundário, também são exemplos de funções diferenciáveis. Vejamos a questão da diferenciabiliadade *mais de perto*!

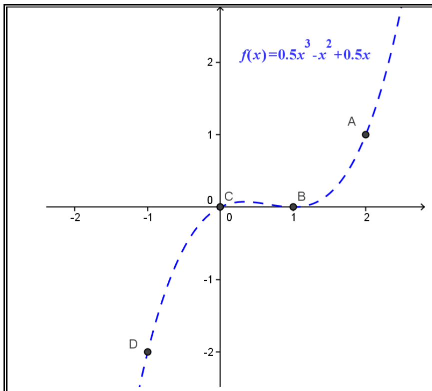

Figura 1 –
gráfico de $f(x)=0.5x^3-x^2+0.5x$

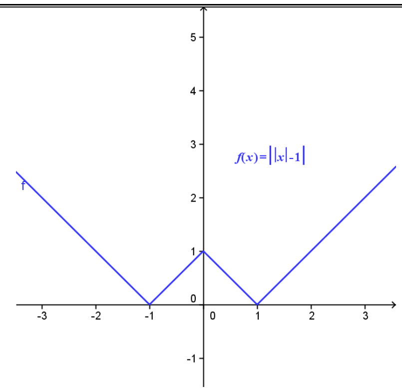

Figura 2 –
gráfico de uma função contínua que não é diferenciável

O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Observe que ao ampliarmos o gráfico de uma função diferenciável uma sequência de vezes, este fica similar a uma reta (veja a sequência de *zoom* ilustrada na fig. 3). E isso é muito bom! Tal fato equivale a dizer que podemos aproximar localmente uma função diferenciável por uma função polinomial de grau um. Assim, poderemos calcular valores aproximados de uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio por meio de uma função polinomial de grau um. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrado em diversos livros de Cálculo (confira, por exemplo, Guidorizzi, 2001, p.465-466).

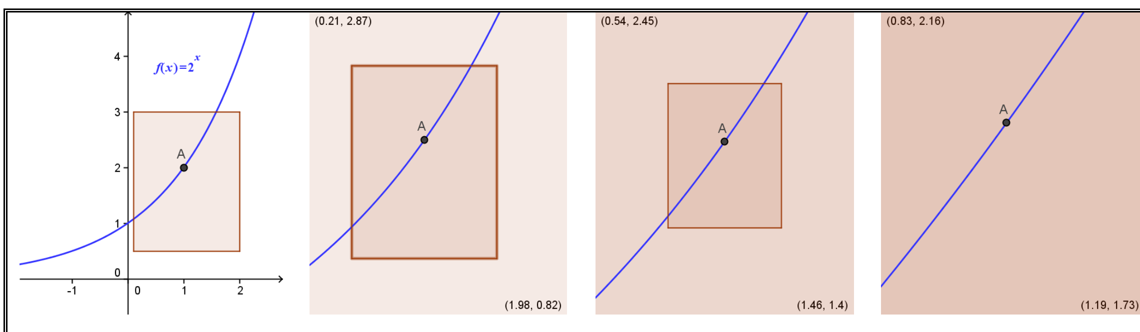

Figura 3 - sequência de *zoom* dado no gráfico de uma função diferenciável realizado com software GeoGebra

Ora, diante do que discutimos no parágrafo anterior, surge uma questão que não quer calar: será que podemos aproximar uma função diferenciável por uma função polinomial de grau dois?

Brook Taylor (1685-1793), um dos melhores alunos de Newton (1643-1727) – e tinha que ser bom aluno para perceber isso –, percebeu que se uma função real é *n-vezes diferenciável*, então podemos aproximar esta função por uma função polinomial de grau *n* na vizinhança de um ponto do seu domínio. Na verdade, como Taylor também observou, quanto maior o grau do polinômio, melhor seria a aproximação realizada. Isso torna a família de funções polinomiais uma classe de funções ainda mais especial. A função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno, assim como a função polinomial, são de uma classe mais do que especial: elas são *infinitamente diferenciáveis*. Assim, todas elas podem ser aproximadas localmente por uma função polinomial de grau n onde o erro cometido será tanto menor quanto maior for o grau do polinômio (*polinômio de Taylor*, esse é o nome) utilizado. Para a função exponencial $f(x) = e^x$, o polinômio de Taylor de grau n associado é: $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!}\right) x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

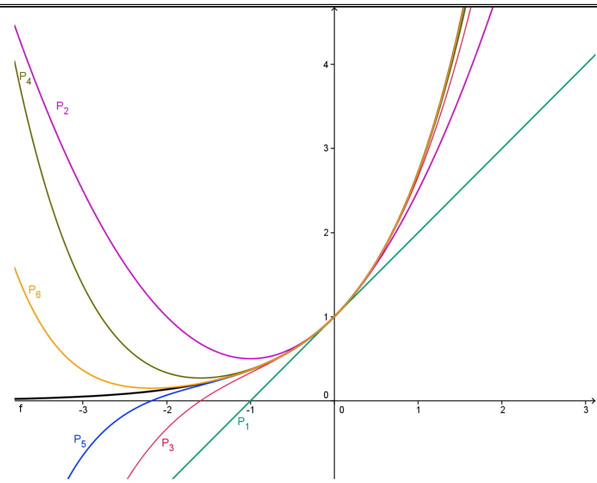

Figura 4 – representação gráfica das seis primeiras funções polinomiais que aproximam a função exponencial $f(x) = e^x$ na vizinhança de x = 0

Em condições ideais (fazendo n crescer indefinidamente, $n \to \infty$) tem-se a seguinte identidade:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ para qualquer } x \text{ real.}$$

Quer dizer, para qualquer número real x, a sequência de somas parciais, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + x$, $S_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, ..., $S_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ irá convergir para e^x. Nesse sentido, pode-se representar a função exponencial por uma "*função polinomial de grau infinito*"! Assim como a função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno também podem ser representadas por uma *série de Taylor* (esse é o nome técnico dado ao nosso *polinômio de Taylor de grau infinito*):

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

e

$$\operatorname{sen} x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Portanto, como vimos para as funções destacadas anteriormente, as séries de Taylor convergem pontualmente para o valor da função em todos os pontos do seu domínio. No entanto, um leitor perspicaz notará que ao escolhermos um polinômio de Taylor de grau n para uma função dada, podemos obter erros de aproximação maiores em pontos do domínio da função distantes da origem.

De fato. Considere, por exemplo, $f(x)=e^x$ e $P_2(x)=1+x+x^2/2!$. Como já observamos, P_2 é uma boa aproximação para a função f em uma vizinhança de x = 0. Note, entretanto, que $f(-10)=e^{-10}$ é um número bem menor que 1, que, por sua vez, é menor que $P_2(-10)=41$. Em verdade, quando x tende a $-\infty$, $P_2(x)$ tende a $+\infty$, enquanto, por outro lado, sabemos que os valores da função exponencial f tende a zero (veja figura 4). A diferença entre os valores de $P_2(x)$ e $f(x)$ ficam cada vez maiores, à medida que x tende a $-\infty$.

4 O mundo digital e as funções polinomiais

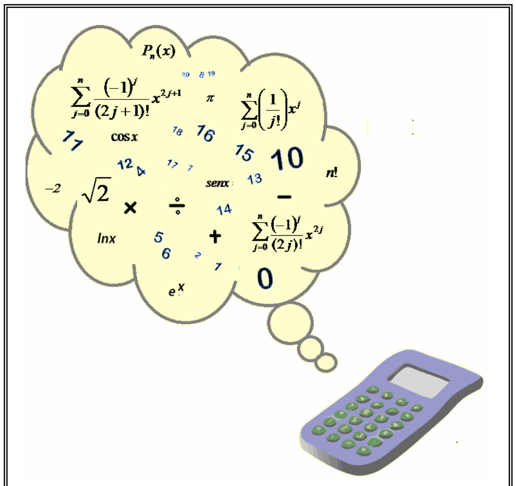

Figura 5 – polinômios e a calculadora

Na sociedade contemporânea o processo de digitalização expande-se a velocidades crescentes, a ponto de muitos autores afirmarem que vivemos em um mundo digital, no qual se instaura a vida digital. No mundo digital tudo é finito e tudo é discreto. O processador de um computador só realiza as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Assim, toda e qualquer função elementar deverá ser implementada em um computador a partir dessas operações. Nesse sentido, a idéia de aproximar funções elementares por funções polinomiais é um caminho bem razoável.

Ora, para valores de x próximos da origem sabemos que os polinômios de Taylor, que podem ser calculados usando as quatro operações básicas, nos fornecem uma boa aproximação. O polinômio de Taylor de grau 2, $P_2(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$, nos dá, por exemplo, uma aproximação de e^x, para todo x no intervalo [-0.1, 0.1], com pelo menos duas casas decimais corretas. Já o polinômio de Taylor de grau 4, $P_4(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$, nos fornece uma aproximação de e^x, para todo x no intervalo [-0.1, 0.1], com pelo menos seis casas decimais corretas. Como o computador calcula então os valores (aproximados) de e^x para valores distantes de x?

Assuma, por exemplo, x = 10. Utilizando as propriedades de potências em $\mathbb{R}$, observe que:

$$e^{10}=(e^5)^2=((e^{5/2})^2)^2=(((e^{5/4})^2)^2)^2=((((e^{5/8})^2)^2)^2)^2=(((((e^{5/16})^2)^2)^2)^2)^2=((((((e^{5/32})^2)^2)^2)^2)^2)^2=$$
$$=(((((((e^{5/64})^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2$$

A igualdade $e^{10}=(((((((e^{5/64})^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2$ obtida, permite-nos calcular e^{10} tomando como referência o valor de $e^{5/64}$. Por outro lado, sabe-se que 5/64 = 0.078125 pertence ao intervalo [-0.1, 0.1], e que, neste intervalo, podemos aproximar $e^{5/64}$ por $P_2(5/64)$ ou por $P_4(5/64)$. Assim, $e^{10}\approx(((((((P_2(5/64))^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2=21816.13105678934433...$ ou $e^{10}\approx(((((((P_4(5/64))^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2=$ 22026.40172180084230... Note que estes valores encontram-se bem próximos de e^{10}, que é igual a 22026.46579480671641.... O valor obtido por meio de P_4, conforme era de se esperar, é bem melhor do que o obtido com P_2. Usando P_4 e o esquema de sucessivos "elevar ao quadrado" (e isso o computador compreende) obtém-se uma aproximação de e^{10} com uma casa decimal correta (após a vírgula).

Uma forma de melhorar a precisão da aproximação seria considerar um intervalo de comprimento menor. Muller (1997) sugere o intervalo $\left[-\frac{\ln 2}{512}, \frac{\ln 2}{512}\right]$ em vez de [-0.1, 0.1]. Para calcular e^x para valores distantes de *x*, faz-se inicialmente uma redução de escala: $r = \frac{x - n \times \ln 2}{256}$, de modo que $-\frac{\ln 2}{512} \le r \le \frac{\ln 2}{512}$ (note que $\frac{\ln 2}{512} \approx 0,0013538030870311431824555314872$).

O valor de e^x é calculado então por

$$e^x = e^{256r + n\ln 2} = e^{256r} e^{n \ln 2} = \left(e^r\right)^{256} 2^n = \left(1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots\right)^{256} \times 2^n \approx \left(P_n(r)\right)^{256} \times 2^n.$$

(cf. Muller, 1997, p.181)

Observe agora que, usando a fórmula de Muller com P_2, obtém-se $e^{10} \approx$ 22026.4643442130347..., uma aproximação com duas casas decimais após a vírgula corretas, e com P_4, obtém-se $e^{10} \approx$ 22026.4657948066195..., uma aproximação com nove casas decimais após a vírgula corretas, quando comparados ao valor de e^{10} que é igual a 22026.46579480671641....

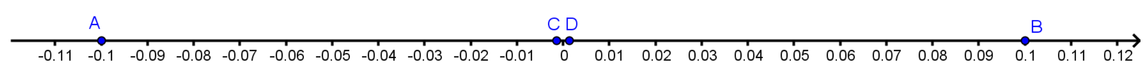

Figura 6 – o intervalo [-0.1,0.1] e o intervalo sugerido por Muller.

Esta técnica pode ser utilizada com outras aproximações polinomiais ou mesmo para outras funções elementares. A teoria do cálculo de aproximações das funções elementares, dependendo do tipo de precisão (fixa ou múltipla) usa técnicas mais avançadas (mínimos quadrados) e outros tipos de polinômios (Chebyshev, por exemplo). Esta tarefa árdua de representar e operar os números é realizada então por meio de algoritmos cada vez mais sofisticados desenvolvidos pelo entrelaçamento de conhecimentos tanto da Aritmética Computacional quanto da Análise Numérica. As referências (Muller, 1997) e (Koren, 2002) retratam com detalhes estes entrelaçamentos. De fundamental importância para as representações das funções diferenciáveis, as funções polinomiais podem ser algoritmizáveis por meio apenas das operações aritméticas elementares. E esses dois ingredientes fazem dos representantes desta família de funções elementos essenciais nos cálculos realizados internamente nos procedimentos computacionais. As funções polinomiais, de forma simples e encantadora, dão, de fato, sustentação à vida digital.

5 Referências

Guidorizzi, H.L. *Um Curso de Cálculo*. 5ª ed. Vol.1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos S.A., 2001.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Lock, P. F., Flath, D. E. *et al. Cálculo e Aplicações*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

Koren. I. *Computer arithmetic algorithms*. 2nd ed. Natick: Massachusetts, A K Peters Ltd, 2002.

Muller, J.M. *Elementary functions : algorithms and implementation*. Boston: Birkhauser, 1997.