A CONJECTURA *abc*

JULIO C. ANDRADE

Resumo. Neste pequeno artigo expositório apresentamos a conjectura *abc* usando quatro diferentes formulações. Nós iremos oferecer uma lista de algumas aplicações e consequências da conjectura, discutiremos uma idéia da demonstração do Último Teorema de Fermat fazendo uso da conjectura *abc* e para concluir fazemos uma menção sobre uma possível e atual demonstração deste famoso problema.

1. Introdução e Motivação

A conjectura *abc* é um problema em aberto (até o momento) em teoria dos números, ela também é conhecida como **Conjectura de Oesterlé-Masser**. Foi primeiramente proposta por Joseph Oesterlé [6] e David Masser [3] respectivamente em 1988 e 1985. Uma das principais importâncias da conjectura *abc* é que a sua validade implica profundas consequências em alguns dos mais difíceis problemas em matemática, de fato muitas conjecturas e problemas famosos em teoria dos números seguem da conjectura *abc*. Nas palavras do matemático Dorian Goldfeld [1] "a conjectura *abc* é o mais importante problema em aberto de análise Diofantina".

Antes de apresentarmos a conjectura *abc* introduziremos algumas definições básicas que irão servir como ponto de partida para o entendimento do enunciado da conjectura *abc*.

Definição 1.1 (Divisor). *Para quaiser números inteiros m e n não–nulos, dizemos que m* ***divide*** *n ou que n é* ***divisível*** *por m, e escrevemos $m \mid n$, se existe um inteiro k tal que $n = km$.*

Definição 1.2 (Números Primos). *Um* ***número primo*** *p é um número natural maior do que 1 que não possui divisores positivos diferentes de 1 e p.*

Apresentamos agora um importante resultado que relaciona números primos com números naturais:

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser representado de uma maneira única como um produto de potências de números primos, i.e.,*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \tag{1}$$

onde $p_1 < p_2 < ... < p_k$ são números primos e os α_i são inteiros positivos.

O autor recebe suporte de uma bolsa de pós–doutorado do National Science Foundation (NSF) e uma bolsa de pós-doutorado da Universidade de Brown.

Por exemplo, $999 = 3^3 \times 37, 1000 = 2^3 \times 5^3$.

Definição 1.4 (Fator Comum)**.** *Fatores que são comuns a dois ou mais números são chamados de fator comum.*

Por exemplo,

$$6 = 2 \times 3,$$
$$4 = 2 \times 2.$$

Assim os fatores comuns de 4 e 6 são 1 e 2.

Definição 1.5 (Primos entre si)**.** *Dois inteiros são* ***primos entre si*** *se eles não possuem nenhum fator positivo comum com excessão do número* 1*. Usando a notação* (m, n) *para denotar o maior divisor comum de* m *e* n *podemos dizer que dois inteiros* m *e* n *são primos entre si se* $(m, n) = 1$*.*

Estamos agora em posição de apresentar a primeira formulação da Conjectra *abc*.

Conjectura 1.6 (Formulação Ingênua da Conjectura *abc*)**.** *Em termos simples, a conjectura abc, diz que se considerarmos* 3 *números inteiros positivos,* a, b, c*, os quais não possuem nenhum fator em comum e satisfazem* $a + b = c$ *e se denotarmos por* d *o produto dos fatores primos distintos do número* abc *temos então que* d*, normalmente, não fica muito menor do que* c*. Ou seja, se os números* a *e* b *são divisíveis por grandes potências de números primos, então o número* c *geralmente não é divisível por grandes potências de primos.*

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.7. *Consideremos*

$$a = 16 = 2^4,$$
$$b = 17,$$
$$c = 16 + 17 = 33 = 3 \times 11.$$

Assim, $d = 2 \times 17 \times 3 \times 11 = 1122$*, que é maior do que* c*. E para este caso, se consideramos* 17^1 *como sendo uma potência grande do primo* 17 *e* 2^4 *como uma potência grande de* 2 *temos claramente que* $17 \nmid 33$ *e* $2 \nmid 33$ *(Onde* $a \nmid b$ *significa que* a *não divide* b*).*

Para concluirmos esta seção apresentamos a definição de radical, que será útil nas próximas seções.

Definição 1.8 (Radical)**.** *Para todo número natural* n*, nós definimos* $r(n) = \prod_{p|n} p$*, i.e.,* $r(n)$ *é o produto de todos os números primos* p *que são divisores de* n*. Neste caso,* $r(n)$ *é chamado de o* ***radical*** *de* n*.*

Por exemplo se,

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

então

$$r(504) = 2 \times 3 \times 7 = 42.$$

É fácil de ver que $r(n)$ é o divisor livre de quadrados e maximal de n. Vamos também dizer que um número inteiro n é *bem composto*, se $r(n)$ é "pequeno"com respeito a n, ou equivalentemente, se a potência a que $r(n)$ deve ser elevado para que se tenha $r(n) = n$ é "grande"com respeito a n. O leitor pode checar que tal potência é $\frac{\log n}{\log r(n)}$. Note que ser grande ou pequeno é ainda relativo neste contexto e portanto iremos adotar aqui que "grande"significa ser maior que 1.5 e "pequeno"caso contrário. Por exemplo, se

$$n_1 = 2^{41} \cdot 3^{15} \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 97^{10}, \text{ então } r(n_1) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 97 = 44814$$

e

$$\frac{\log n_1}{\log r(n_1)} = 9.316746.$$

Assim n_1 é bem composto. Você consegue encontrar alguns exemplos de números bem compostos e não bem compostos? O que podemos dizer do número $n_2 = 1254792$? Nós aconselhamos o leitor a checar, usando algum software matemático, se os seguintes números são bem compostos ou não: $n_3 = 64646191$, $n_4 = 267616847651$ e $n_5 = 78971478924741$.

2. Algumas Formulações da Conjectura *abc*

Nesta seção iremos apresentar a descrição precisa da conjectura *abc*.

Conjectura 2.1 (Forma Preliminar da Conjectura *abc*)**.** *Se $a + b = c$, onde a, b, c são números naturais e primos entre si, então o número abc não pode ser bem composto. Em particular, a soma de dois números naturais que são primos entre si e bem compostos não pode ser bem composto.*

Observação 2.2. *É fácil de provar que se $(a, b) = 1$ então $(a + b, a) = 1$ e $(a + b, b) = 1$. Prove isto!*

Vamos agora apresentar outra formulação para a conjectura *abc*.

Conjectura 2.3 (Forma Heurística da Conjectura *abc*)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, existe somente uma quantidade finita de triplas de números naturais que são primos entre si e $a + b = c$ tal que $c > d^{1+\varepsilon}$, onde d denota o produto dos fatores primos distintos de abc.*

Por exemplo, se

$$\begin{aligned} a &= 16 = 2^4, \\ b &= 17, \\ c &= 16 + 17 = 33 = 3 \cdot 11, \end{aligned}$$

temos que $d = 1122 > c$. Portanto para todo $\varepsilon > 0$, c não é maior do que $d^{1+\varepsilon}$. Estamos agora em posição de coletar as nossas notações anteriores e apresentar a versão definitiva da conjectura *abc*.

Conjectura 2.4 (Conjectura *abc* de Oesterlé e Masser)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante κ_ε tal que se a, b e c são números primos entre si para o qual*

$$a + b = c, \tag{2}$$

então

$$c \leq \kappa_\varepsilon \left(\prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p|abc}} p \right)^{1+\varepsilon} = \kappa_\varepsilon \left(\operatorname{rad}(abc)\right)^{1+\varepsilon}. \tag{3}$$

De fato as conjecturas 2.3 e 2.4 são equivalentes e a demonstração de tal fato pode ser encontrada em [4, pg. 16–17] e nós aconselhamos o leitor a tentar a provar tal equivalência ou a consultar a bibliografia com a sua demonstração.

3. O Último Teorema de Fermat e a Conjectura *abc*

Nesta seção iremos apresentar um rascunho da demonstração do Último Teorema de Fermat usando a conjectura *abc*. Notamos que este é apenas um rascunho da demonstração e recomendamos ao leitor interessado no Último Teorema de Fermat a consultar o excelente livro por Simon Singh [10]. E lembre-se que iremos provar que a o Último Teorema de Fermat segue da Conjectura *abc* mas a recíproca não é verdadeira e é até por isso que a demonstração da Conjectura *abc* ainda não saiu (veja a próxima seção sobre o atual status da conjectura).

Teorema 3.1 (O Último Teorema de Fermat)**.** *Assuma que a Conjectura abc 2.4 seja válida com $\kappa_\varepsilon = 1$. Então não existem soluções para*

$$x^n + y^n = z^n \tag{4}$$

para $n \geq 3$, com $x, y, z \neq 0$.

Idéia da Demonstração. O enunciado será obtido para $n > 3$ uma vez que Euler mostrou que não há soluções quando $n = 3$ (veja [12]).

Seja

$$x^n + y^n = z^n$$

onde x, y, z são números inteiros positivos e primos entre si (podemos considerar x, y, z primos entre si, pois caso contrário poderíamos dividir toda a equação acima pelo máximo divisor comum de (x, y, z) elevado a n), então tomamos

$$a = x^n, b = y^n, c = z^n$$

na conjectura *abc*. Nós não temos nenhuma maneira precisa de determinar o produto dos números primos que dividem $x^n y^n z^n$, mas nós sabemos que estes são exatamente os primos que dividem xyz, e assim o produto de tais primos deve ser $\leq xyz$. Mais ainda, uma vez que x e y são positivos, eles são ambos menores do que z e assim $xyz < z^3$. A conjectura *abc* portanto nos fornece que

$$z^n \leq \kappa_\varepsilon (z^3)^{1+\varepsilon},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon = 1/6$ e $n \geq 4$, temos que $n - 3(1+\varepsilon) \geq n/8$, e assim nós deduzimos da conjectura *abc* que

$$z^n \leq \kappa_{1/6}^8.$$

Nós assim provamos que qualquer solução de (4) com $n \geq 4$, os números x^n, y^n, z^n são todos menores do que um limite absoluto e assim não existem mais do que uma quantidade finita de tais soluções.

Agora imaginemos que nós temos em mão uma versão explicita da conjectura *abc*, digamos $\kappa_\varepsilon = \varepsilon = 1$, então poderíamos dar uma cota superior para todas as soluções para a equação de Fermat e calcularmos até tal cota para então finalmente determinarmos se existem quaisquer soluções ou não. $\square$

Observação 3.2. *Observe que O Último Teorema de Fermat apenas segue da conjectura abc se pudermos dizer que* $\kappa_\varepsilon = 1$.

De fato, alguns matemáticos acreditam que a conjectura *abc* é válida com $\kappa_\varepsilon = \varepsilon = 1$. Se assim for, o Último Teorema de Fermat segue para $n \geq 6$ imediatamente, e os casos $n = 3, 4, 5$ são conhecidos há quase 200 anos, veja [8].

4. Algumas Consequências da Conjectura *abc*

A conjectura *abc* tem um enorme número de consequências em profundas questões da teoria dos números. Vamos citar apenas três delas:

- A conjectura de Fermat–Catalan, uma generalização do Último Teorema de Fermat sobre potências que são somas de potências.[7]
- A existência de infinitos primos que não são primos Wieferich. [9]
- A forma fraca da conjectura de Marshall Hall sobre a separação entre quadrados e cubos de números inteiros.[5]

Um fato histórico interessante é que a conjectura *abc* é de fato um análogo para os números inteiros do teorema conhecido como **Teorema de Mason–Stothers** [11, 2].

Teorema 4.1 (Teorema de Mason–Stothers)**.** *Se denotarmos por* $\mathbb{C}[t]$ *os polinômios com coeficientes em* $\mathbb{C}$ *e se* $a(t), b(t), c(t) \in \mathbb{C}[t]$ *não possuem nenhuma raiz em comum e nos fornecem uma solução genuína para* $a(t) + b(t) = c(t)$*, então*

$$\max\{\partial(a(t)), \partial(b(t)), \partial(c(t))\} \leq \partial(\mathrm{rad}(abc)) - 1,$$

onde $\partial(a(t))$ *indica o grau do polinômio* $a(t)$ *e* $\mathrm{rad}(f)$ *é o polinômio de menor grau que possui as mesmas raízes de* f*, ou seja,* $\partial(\mathrm{rad}(f))$ *nos fornece o número de raízes distintas de* f*.*

5. O futuro da conjectura *abc*

Em agosto de 2012, o matemático Shinichi Mochizuki disponibilizou uma série de quatro artigos contendo uma séria alegação que ele tinha obtido uma demonstração da conjectura *abc*. A teoria utilizada por Shinichi Mochizuki para apresentar a sua "demonstração"da conjectura *abc* é conhecida como teoria de Teichmüller inter–universal. Os especialistas irão levar meses para checar a nova matemática desenvolvida por Mochizuki, a qual foi desenvolvida durante décadas e apresenta mais de 500 páginas em artigos. Pode ser o caso de no futuro termos o teorema *abc* e não mais apenas uma conjectura e isso definitivamente irá tornar Mochizuki uma página a sempre ser lembrada na história da matemática.

6. Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer aos comentários de um parecerista anônimo que em muito ajudaram a melhorar a apresentação do artigo. E também gostaria de agradecer várias discussões com o professor Dorian Goldfeld.

Referências

[1] Goldfeld, D., *Beyond the last theorem.* Math Horizons (1996) (September): 26-34.
[2] Mason, R. C., *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.
[3] Masser, D. W., *Open problems*, in Chen, W. W. L., Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory (1985), London: Imperial College.
[4] Mazur, B., *Questions about Number*, in New Directions in Mathematics, http://www.math.harvard.edu/ mazur/papers/scanQuest.pdf
[5] Nitaj, A., *La conjecture abc.* Enseign. Math. (1996), 42 (12): 3-24.
[6] Oesterlé, J., *Nouvelles approches du "théorème"de Fermat*, Astérisque, Séminaire Bourbaki, (1988) 694 (161): 165-186.
[7] Pomerance, C., *Computational Number Theory.* The Princeton Companion to Mathematics. Princeton University Press. pp. 361-362, 2008.
[8] Ribenboim, P., 13 *Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer–Verlag, New York and Heildelberg, 1979.
[9] Silverman, J. H., *Wieferich's criterion and the abc-conjecture.* Journal of Number Theory (1988) 30 (2): 226-237.
[10] Singh, S., *O último teorema de Fermat*, São Paulo, Editora Record, 2008.
[11] Stothers, W. W., *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, (1981) 2 **32**: 349-370.
[12] *Fermat's Last Theorem*, http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's$_{L}ast_{T}heorem$

Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM) and Department of Mathematics, Brown University, Providence–RI–02903, U.S.A.
E-mail address: `julio_andrade@brown.edu`